УДК 501

МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ ПО ПРОВЕРКЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Исаев Ю.М., д.т.н., профессор, Семашкин Н.М., к.т.н., доцент, ФГБОУ ВО Ульяновский ГАУ

Рассмотрим для примера выражение уравнения регрессии, описывающее изменения пропускной способности устройства ворошения зернового материала от частоты вращения спирали и изменяемом шаге винтовых линий спирали в кодовых переменных:

$$y = 0,606 + 0,235x_1 + 0,041x_1^2 + 0,218x_2 + 0,104x_1 \cdot x_2, \qquad (1)$$

где x_1 – частота вращения спирали; x_2 – шаг спирали.

Представив, что в каждойой точке факторного пространства, которой соответствует одна из строк матрицы планирования эксперимента, проводится серия из *m* опытов. Для любой *i*-й точки вычисляется среднее значение выходной величины:

$$\overline{y}_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{y_{i,j}}{m}, \qquad (2)$$

где $y_{i,j}$ – значения экспериментов.

Построчная дисперсия выходной величины определится:

$$S^2\{\overline{y}_i\} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\left(y_{i,j} - \overline{y}_i\right)^2}{m-1}. \qquad (3)$$

Среди всей совокупности рассчитанных построчных дисперсий выбирается максимальная $S^2\{\overline{y}_i\}_{\max}$ и берется отношение данной дисперсии к сумме всех построчных дисперсий $S^2\{\overline{y}_i\}$, т.е. определяется расчетное значение коэффициента Кохрена:

$$G_{\partial} = \frac{S^2\{\overline{y}_i\}_{\max}}{\sum_{j=1}^{N} S^2\{\overline{y}_i\}}. \qquad (4)$$

Выражение (4) показывает, какую долю в общей сумме построчных дисперсий принадлежит максимальной из них.

Расчетное значение коэффициента Кохрена сравнивают с табличным значением G – критерия, которое выбирают из таблиц для принятого уровня значимости α и для чисел степени свободы соответственно числителя $f_1 = m - 1$ и знаменателя $f_2 = N$. При выполнении условия $Gp < G$т, то с выбранным уровнем статистической значимости α (с достоверностью 1 – α) все построчные дисперсии признаются однородными. В ином случае гипотезу отвергают. Определим расчетное значение коэффициента для $m = 3$, $N = 8$, будет:

$$S^2\{\overline{y}_i\}_{\max} = 0{,}011,$$

$$\sum_{j=1}^{N} S^2\{\overline{y}_i\} = 0.049,$$

$$G_{\eth} = S^2\{\overline{y}_i\}_{\max} \Big/ \sum_{j=1}^{N} S^2\{\overline{y}_i\} = 0{,}225.$$

В соответствии с таблицей коэффициентов для α = 0,05; $f_1 = 3 - 1 = 2$; $f_2 = 8$, находим Gт = 0,52, так как условие Gт > Gp выполняется и все построчные дисперсии признаются однородными.

После проверки однородности найденные коэффициенты уравнения регрессии необходимо оценить на статистическую значимость. Оценку производят по t-критерию Стьюдента. Для каждого коэффициента a_k вычисляют коэффициент:

$$t_k = \frac{|a_k|}{S\{a_k\}}. \qquad (5)$$

Таким образом проверяют отклонение от нуля найденной оценки. $S\{a_k\}$ – оценка среднего квадратичного отклонения погрешности определения коэффициента регрессии.

Оценка дисперсии коэффициентов, найденных по экспериментальным данным:

$$S^2\{a_k\} = \frac{S_{\hat{a}}^2}{N \cdot m}, \qquad (6)$$

$$S\{a_k\} = \sqrt{S^2\{a_k\}}. \qquad (7)$$

Оценкой генеральной дисперсии воспроизводимости $S_в^2$, характеризующая точность одного измерения, является средняя из всех построчных дисперсий:

$$S_в^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{S^2\{\overline{y}_i\}}{N}. \qquad (8)$$

При выбранном уровне статистической значимости α по таблицам распределения Стьюдента при числе степеней свободы $f = N\,(m - 1)$ находят табличное значение коэффициента $t_{табл}$. При выполнении неравенства $t_{табл} > t_k$ принимается нуль-гипотеза, что найденный коэффициент a_k является статистически незначительным и его следует исключить из уравнения регрессии (1).

Для рассматриваемого примера: $S_в^2$ = 6,1·10^{-3}, тогда:

$$S^2\{a_k\} = S_в^2 / N \cdot m = 2{,}54 \cdot 10^{-4},$$

$$S\{a_k\} = \sqrt{S^2\{a_k\}} = 0{,}016.$$

Определим расчетные значения коэффициента Стьюдента:

t_0 = 0,606 / 0,016 = 37,85; t_1 = 0,235 /0,016 = 14,7

t_2 = 0,041 / 0,016 = 2,54; t_3 = 0,218 / 0,016 = 13,63

t_4 = 0,011 / 0,016 = 0,71; t_5 = 0,104 / 0,016 = 6,5.

Из таблиц при уровне статистической значимости α = 0,05 и числе степеней свободы f = 8·(3 – 1) = 16, определяют табличное значение коэффициента. Оно равно $t_т$ = 2,12. Сопоставим расчетные значения t_k с табличным $t_т$. Неравенство выполняется для t_4. Поэтому, можно предположить, что a_4 статистически незначим и его можно исключить из уравнения регрессии.

Полученное уравнение регрессии (1) необходимо проверить на адекватность исследуемому объекту. Для этой цели необходимо оценить, насколько отличаются средние значения y_i выходной величины, полученной в точках факторного пространства, и значения y_i ,полученного из уравнения регрессии в тех же точках факторного пространства. Для этого используем дисперсию адекватности:

$$S_{ад}^2 = \frac{m}{N - l} \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - y_i'\right)^2, \qquad (9)$$

где l – число значимых коэффициентов.

Адекватность модели проверяют по критерию Фишера:

$$F_p = S_{ad}^2 / S_{в}^2 \ . \tag{10}$$

Найденное расчетным путем F_p сравнивают с табличным значением $F_т$, которое определяется при уровне значимости α и числе степеней свободы $f_{ад} = N - l$ и $f_в = N \cdot (m - 1)$. Если $F_р < F_т$, то полученная математическая модель с принятым уровнем статистической значимости α адекватна экспериментальным данным.

Для рассматриваемого уравнения получаем:

$$S_{ad}^2 = 3{,}4 \cdot 10^{-3},$$
$$S_{в}^2 = 6{,}1 \cdot 10^{-3},$$

тогда

$$F_p = S_{ad}^2 / S_{в}^2 = 0{,}558.$$

Табличное значение коэффициента Фишера при уровне статистической значимости α = 0,05 и числе степеней свободы $f_{ад} = (8 - 5) = 3$ и $f_в = 8(3- - 1) = 16$ будет $F_т = 3{,}24$. Следовательно, при выбранном уровне статистической значимости полученная в результате эксперимента регрессионная зависимость адекватна исследуемому объекту.

Уравнения регрессии (1), содержат статистические значимые коэффициенты $a_0 - a_3$ в кодированной системе и при выбраном уровне статистической значимости полученная в ходе проведения экспериментальных исследований, регрессионная зависимость адекватна исследуемому объекту.