УДК 536.1

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В СПЛОШНОМ ЦИЛИНДРЕ ПРИ РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩЕМСЯ ИСТОЧНИКЕ ТЕПЛА ПО ВИНТОВОЙ ЛИНИИ

Н.П. Филимонов, кандидат физико-механических наук

Процесс изменения температуры в теле вращения описывается уравнением теплопроводности. В координатах, связанных с источником, совершающим равномерное движение по винтовой линии на поверхности, уравнение теплопроводности запишется в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+V\frac{\partial T}{\partial z}+\omega\frac{\partial T}{\partial\varphi} \qquad (1)$$

Начальное условие задаётся в виде:

$$t=0 \qquad T-T_0=0$$

Удельный тепловой поток подводится к телу от источника по поверхности контакта детали и обрабатывающего ролика σ_0.

Вследствие высокой теплопроводности металлов и, как показывает эксперимент, влияние асимметрии температурного поля по координате φ распространяется на поверхность, не превышающую $4\sigma_0$ и по координате r на глубину не более 1,5 мм.

Поэтому с достаточной степенью приближения взаимным влиянием распределения температуры по координатам r и φ допустимо пренебречь.

Поставленная задача (1) представляет собой задачу Коши с нулевым начальным условием. Решение задачи непрерывно вместе с производными, кроме области контакта обрабатываемой детали и обрабатывающего ролика.

Для решения задачи Коши используется следующая лемма.

Если в задаче Коши:

$$a\Delta T=\frac{\partial T}{\partial t};\ \mathrm{T}(\mathrm{M},0)=\varphi(M) \quad \text{или const}$$

начальная функция φ(M) представима в виде:

$\varphi(M) = \varphi_1(x), \quad \varphi_2(y), \quad \varphi_3(z)$ или C_1, C_2, C_3

то решение задачи определяется в виде:

$$T(M,t) = T_1(x,t)\; T_2(y,t)\; T_3(z,t),$$

где T_1, T_2, T_3 – решения соответствующих одномерных задач.

В соответствии с леммой и приведёнными выше допущениями уравнение (1) разделяется на три одномерных. При этом количественно влияние источника можно отнести совершенно равноправно к любому из этих уравнений. Два других уравнения определяют функции влияния источника. Для этих уравнений в пределах пятна контакта задаётся δ - функция и определяется соответствующая функция Грина, характеризующая влияние мгновенно действующего при t = 0 источника.

Итак, уравнение (1) разделяется на следующие три:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial T}{\partial t}; \quad t = 0; \quad T_1 = 0;$$

$$r = r_0; \qquad \frac{\partial T_1}{\partial r} + hT_1 = \frac{q}{\lambda} \qquad (2)$$

$r = 0$; T_1 – ограничена

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T_2}{\partial s^2} + r_0\omega\frac{\partial T_2}{\partial s};\ t = 0;\ T_2 = 0 \text{ кроме участка } -b_2<z<b_2,$$

где $T_2 = 1$ (3)

$$\frac{\partial T_3}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T_3}{\partial z^2} + V\frac{\partial T_3}{\partial z};\ t = 0;\ T_3 = 0 \text{ кроме участка } -b_2 <$$

$z < b_2$,

где $T_3 = 1$ (4)

В уравнениях (2), (3), (4):

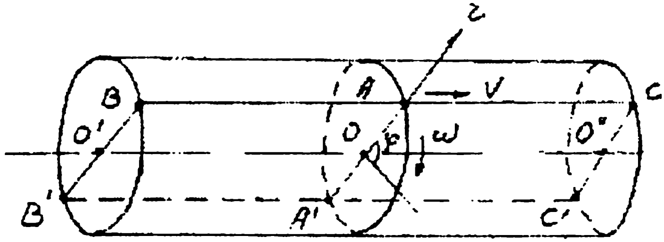
b_1 и b_2 – полуоси эллипса пятна контакта;

λ- коэффициент теплопроводности;

a – коэффициент температуропроводности;

$h = \dfrac{\alpha}{\lambda}$, где α- коэффициент теплоотдачи с поверхности $r = r_0$.

Постановка задачи (2), (3), (4) может быть пояснена рисунком.



Задача (2) решается методом разделения переменных.

Зависимость решения от координаты r определяется функцией Бесселя нулевого порядка:

$$R_\kappa = J_0\left(\alpha_\kappa \frac{r}{r_0}\right)$$

квадрат нормы
$$N^2 = \frac{r_0^2}{2} J_0^2(\alpha_\kappa)\left(1 + h^2 \frac{r_0^2}{\alpha_0^2}\right)$$

где $\alpha_\kappa > 0$ – корни характеристического уравнения:

$$\alpha_\kappa J_1(\alpha_\kappa) - h\, r_0 J_0(\alpha_\kappa) = 0 : (\kappa = 1, 2, 3, \ldots)$$

Общее решение задачи (2) после интегрирования записывается в виде:

$$T_1 - T_0 = \frac{2qr_0}{\lambda} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + h^2 \frac{r_0^2}{\alpha_\kappa^2}\right)\alpha_\kappa^2} \frac{J_0\left(\alpha_\kappa \frac{r}{r_0}\right)}{J_0(\alpha_\kappa)} \left[1 - e^{1\left(\sqrt{a}\frac{\alpha_\kappa}{r_0}\right)^2 t}\right] \quad (5)$$

Для достаточно массивных деталей можно положить $h \sim 0$.

$$T_1 - T_0 = \frac{2qr_0}{\lambda} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\alpha_\kappa \frac{r}{r_0}\right)}{\alpha_\kappa^2 J_0(\alpha_\kappa)} \left[1 - e^{1\left(\sqrt{a}\frac{\alpha_\kappa}{r_0}\right)^2 t}\right] \quad (6)$$

Для практических целей можно ограничиться вычислением первого члена ряда (6):

$$T_1 - T_0 = \frac{2qr_0}{\lambda} \cdot \frac{J_0\left(\alpha_\kappa \frac{r}{r_0}\right)}{\alpha_\kappa^2 J_0(\alpha)} \left[1 - e^{1\left(\sqrt{a}\frac{\alpha}{r_0}\right)^2 t}\right] \qquad (7)$$

где α- первый корень уравнения.

$$J_1(\alpha) = 0$$

Уравнения (3) и (4) решаются однотипно.

Обратимся к уравнению (4):

$$T_3'(z,t) = \overline{T}_3(z,t) \cdot e^{-\frac{V}{2a}\left(z + \frac{V}{2}t\right)} \qquad (8)$$

Функция $\overline{T}_3(z,t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial \overline{T}_3}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T_3}{\partial z^2} \qquad (9)$$

Начальное распределение $\overline{T}_3$ задаётся в виде δ- функции

$$T_3'(z,0) = \delta(z + b_2) - \delta(z - b_2) \qquad (10)$$

т.е. при $z < -b_2$ $\quad T'_3(z, 0) = 0$

и при $z > -b_2$ $\quad T'_3(z, 0) = 0$,

а при $-b_2 \le z \le -b_2$ $\quad T'_3(z, 0) = 1$.

Автомодельное решение этой задачи находится с помощью подстановки $\overline{T}_3 = f\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right)$

Результат решения записывается в виде:

$$\overline{T}_3(z,t) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{z + b_2}{\sqrt{4at}}\right) - \Phi\left(\frac{z - b_2}{\sqrt{4at}}\right)\right] \qquad (11)$$

где $\Phi(y)$ – интеграл ошибок, соответствующий аргументу y.

Формула (11) характеризует собой процесс выравнивания по z единичного возмущения, заданного в момент времени $t = 0$, распределённого по отрезку $-b_2 \le z \le -b_2$.

Помножим и разделим (11) на $\Delta z = 2b_2$ и найдём результат при $\Delta z \to 0$ (функцию Грина):

$$\lim_{z'\to 0}\frac{\partial}{\partial z'}\Phi\left(\frac{z-z'}{\sqrt{4at}}\right)=\frac{1}{\sqrt{4\pi at}}e^{-\frac{z^2}{\sqrt{4at}}}$$

Тогда:

$$T_3'=\frac{1}{\sqrt{4\pi at}}e^{-\frac{(z+Vt)^2}{4at}}\cdot 2b_2 \qquad (12)$$

где z – отсчитывается от центра пятна контакта.

Интегрируя (12) по времени, определим функцию влияния единичного возмущения, действующего в течение времени t:

$$T_3=2b_2\int_0^t\frac{1}{\sqrt{4\pi a\tau}}e^{-\frac{(z+V\tau)^2}{4a\tau}}\cdot d\tau \qquad (13)$$

Функция $T_2(S,t)$ определяется аналогично.

$$T_2=2b_1\int_0^t\frac{1}{\sqrt{4\pi a\tau}}e^{-\frac{(S+r_0\omega\tau)^2}{4a\tau}}\cdot d\tau \qquad (14)$$

Общее выражение для функции влияния постоянно действующего единичного возмущения по координатам s и z можно записать в виде:

$$T_{2,3}=\sigma_0\int_0^t\frac{1}{4\pi a\tau}e^{-\frac{(z+V\tau)^2+(S+r_0\omega\tau)^2}{4a\tau}}\cdot d\tau, \qquad (15)$$

а общее решение поставленной задачи в виде:

$$T=T_1\cdot T_{2,3} \qquad (16)$$

Выводы

Найденное решение удовлетворяет исходному уравнению теплопроводности приближённо в соответствии с допущениями, начальному и граничному условию, а также условию ограниченности температуры при $r\to 0$

Полученные результаты могут быть использованы в расчётах тепловых режимов при электромеханической обработке.

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики– М.: Наука, 1977.
2. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1974.
3. Карташов Э.М. Аналитические методы в теплопроводности твёрдых тел. – М.: Высшая школа, 1979.
4. Рыкалин Н.Н. Расчёты тепловых процессов при сварке. – М.: Машиз, 1951.
5. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. – М.: Физматгиз, 1963.

УДК 621.4

ВОССТАНОВЛЕНИЕ МОТОРНЫХ МАСЕЛ СТУПЕНЧАТЫМ МЕТОДОМ

К.У. Сафаров, В.М. Холманов, кандидаты технических наук
М.М. Замальдинов, аспирант

Восстановление моторных масел в настоящее время является важной проблемой. Отработанные масла не следует выбрасывать, так как практически не происходит ухудшение качества базового масла во время его работы. Масла также подлежат регенерации, в процессе которой восстанавливаются первоначальные свойства отработанных масел для повторного использования наряду со свежими маслами соответствующих марок [1, 2, 3]. Поэтому предприятия вынуждены восстанавливать моторные масла в производственных условиях.

В УГСХА на кафедре «Эксплуатации МТП» была предложена схема восстановления моторного масла ступенчатым методом. Суть заключается в очистке масла от механических примесей с помощью модуля, основанного на центробежной очистке масла с помощью гидроциклона, и модуля с магнитной очисткой. На первой ступени был использован модуль с гидроциклонной очисткой. Принцип работы заключается в следующем. В бак (1) (рис. 1) установки вместимостью 100 л заливается отработанное масло.