

дальнейшее ее повышение будет приводить к неоправданно большим затратам на единицу продукции. Поэтому в этом случае в качестве параметра оптимизации целесообразно выбирать экономические показатели.

Параметр оптимизации должен быть простым, понятным и единственным, отражающим специфику объекта исследования, не против-

УДК 631.349.083

## РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПРОДОЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ НАВЕСНЫХ АГРЕГАТОВ

Ю.М. Исаев, доктор технических наук, Ульяновская ГСХА

Внешние силы, действующие на навесной сельскохозяйственный агрегат. Во время работы на навесной сельскохозяйственный агрегат действует сложная система распределенных сил. Рассмотрим силовое взаимодействие агрегата с опорной поверхностью и с обрабатываемой средой (почвой, растениями). Для упрощения задачи обычно распределенные силы, возникающие на рабочих органах навесной машины и в точке контакта ее опорных колес, а также колес агрегата с поверхностью поля, заменяют сосредоточенными силами, действующими в трех плоскостях проекций.

Так, если пренебречь силами инерции неуравновешенных масс агрегата, то на него помимо веса  $G_m$  - будут действовать реакции опорной поверхности в точках контакта с ней колес. В проекциях на оси координат неизменного направления ( $xuz$ ) эти силы приводятся к вертикальной  $Z_i$ , поперечной  $Y_i$  и продольной  $X_i$  реакциям, действующим на каждое колесо агрегата.

Введем некоторые ограничения на значения этих сил. Будем считать, что система элементарных нормальных сил, действующих со стороны опорной поверхности на колесо с пневматической шиной, приводится только к нормальной силе  $Z_i$  приложенной к центру контакта, причем последний лежит на вертикальной оси, проходящей через центр колеса. Моментом элементарных сил относительно поперечной оси, проходящей через центр контакта, будем пренебрегать.

Далее при учете упругости опор агрегата (за счет пневматических шин и в случае наличия упругих подвесок) будем считать

где  $c_i$  - жесткость  $Z_i = |c_i \Delta z_i|$  в направлении оси  $z$ ,

речь здравому смыслу и принятым понятиям предметной области исследования и иметь экономическую природу.

$z_i$  - соответствующая деформация  $i$ -й опоры,  $\Delta$

Эластичность опор в поперечном и продольном направлениях учитывать не будем. В дальнейшем при выводе уравнения движения примем для задних колес агрегата

$$c_1 = c_2 = c_3$$

и для передних

$$c_3 = c_4 = c_n$$

**Основные положения.** Для составления уравнений движения навесного агрегата наиболее целесообразно использовать уравнение Лагранжа второго рода в форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = Q_q \quad (2)$$

где  $T$  и  $\Pi$  - кинетическая и потенциальная энергии агрегата, Дж;  $\Phi$  - функция сопротивления;  $q$  - обобщенная координата, м;  $Q_q$  - обобщенная сила, соответствующая координате  $q$ , Н.

Кинетическая энергия  $T$  навесного агрегата складывается из кинетической энергии агрегата  $T_m$  и кинетических энергий  $T_{nm}$  навесных машин в агрегате, т. е.

$$T = T_m + T_{nm}$$

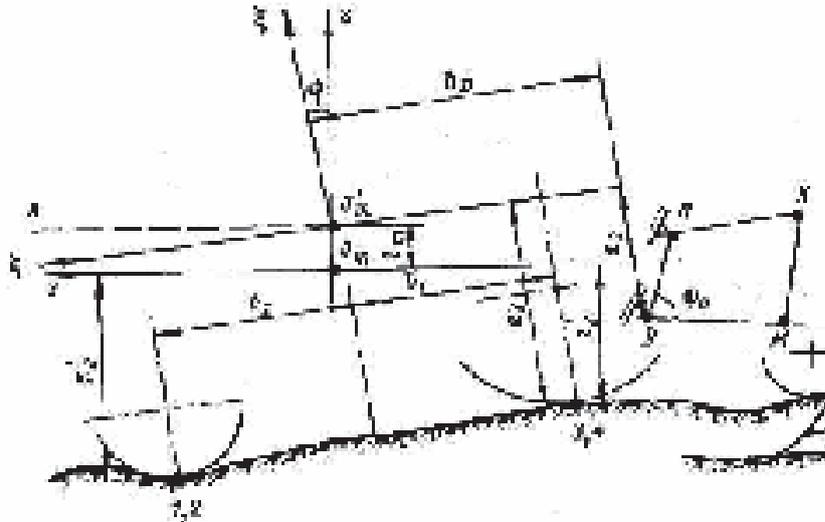
Для агрегата в общем случае имеем

$$T_m = \frac{1}{2} (M_m u^2 + J_h \omega^2) \quad (3)$$

где  $M_m$  - масса агрегата, кг;  $u$  - абсолютная скорость центра масс агрегата, м/с;  $J_h$  - моменты инерции массы агрегата относительно оси подвижной системы координат  $h$ .

Так как

то по выражению (3) можно определить кинетическую энергию  $\dot{u}^2 = \dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2 + \dot{z}_m^2$  в функции его



**Рис. 1. Схема агрегата в продольно-вертикальной плоскости проезды**

обобщенных координат. Кинетическая энергия  $T_{nm}$  каждой навесной машины определяется как сумма кинетических энергий  $T_{ni}$  отдельных ее частей, т. е.

причем для каждой  $T_{nm} = \sum T_{ni}$  шины

$$T_{ni} = \frac{1}{2} m_{ni} u_{ci}^2 \tag{4}$$

где  $u_{ci}$  – абсолютная скорость центра масс каждой части  $i$  шины, м/с.

Скорость  $u_{ci}$  нетрудно выразить через обобщенные координаты агрегата. Практически скорости  $u_{ci}$  определяются из планов скоростей механизма навесной части машины на агрегат и механизмов связи дополнительных частей с основной.

Определение потенциальной энергии  $\Pi$  агрегата является несколько более сложной задачей. К силам, имеющим потенциал, относятся веса агрегата и навесной машины, а также силы упругости при учете эластичности пневматических шин и поддресоренности некоторых масс агрегата.

В расчетной схеме, как уже отмечалось, остов агрегата рассматривается как твердое тело, опирающееся на четыре упругих опоры с жесткостями  $c_z$  и  $c_n$ , причем эластичность опор в продольном и поперечном направлениях не учитывается.

У навесной машины отдельные ее части могут быть снабжены пружинами и другими устройствами, в которых при работе возникают силы упругости. Поэтому потенциальная энергия навесного агрегата будет складываться в общем случае из потенциальной энергии  $\Pi_1$  сил тяжести

агрегата и отдельных частей навесной машины и потенциальной энергии сил  $\Pi_2$  сил упругости, т. е.

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2, \tag{5}$$

Причем

$$\Pi_1 = \sum \Pi_{Gi}$$

$$\Pi_2 = \sum \Pi_{ci}$$

где  $\Pi_{Gi}$  – потенциальная энергия  $i$ -й силы тяжести  $G_i$  части агрегата, Дж

$\Pi_{ci}$  – потенциальная энергия  $j$ -й силы упругости, Дж.

Если обозначить  $z_k$  полную деформацию  $k$ -й упругой опоры агрегата, то при ее жесткости  $c_k$  будем иметь

$$\Pi_{ck} = \frac{1}{2} c_k (\Delta z_k)^2 \text{ Дж}$$

и для всех четырех опор

$$\Pi_2^a = \frac{1}{2} \sum c_k (\Delta z_k)^2 \tag{6}$$

Величина  $\Pi_2^a$  складывается из статического сжатия  $d_k$  в  $\Delta z_k$  в навесном положении и изменения координаты  $z_k$  при движении по неровностям поверхности поля. Если обозначить через  $z'_k$  координату точки поверхности поля под соответствующей опорой (колесом) агрегата, то в возмущенном положении

$$\Delta z_k = z_k - z'_k - d_k$$

или 
$$\Pi_2^a = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 c_k (z_k - z'_k - d_k)^2$$

$$\Pi_2^a = \frac{1}{2} \sum_1^4 c_k (z_k - z'_k)^2 - \quad (8)$$

Зн  
наг:  $\Delta$

$$z_k = z_m + z_k - x_k y \quad (k = 1, 2, 3, 4). \quad (9)$$

Применительно к обозначениям на рис. 1, будем иметь

$$x_{1,2} = -b_1; \quad x_{3,4} = -b_2; \quad z_k = -a_k$$

После ряда преобразований  $\Pi_2^a$  приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} \Pi_2^a = & \frac{1}{2} C_x (z_m - a_k)^2 + C_y y^2 + C_{zy} (z_m - a_k) - \\ & - A_x (z_m - a_k) - A_y y - Z_m^0 (z_m - a_k) - \\ & - M_y^0 y + \frac{1}{2} \sum_1^4 c_k (z'_k + d_k)^2 \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} C_x &= 2(c_1 + c_2); \quad A_x = c_1(z'_1 + z'_2) + c_2(z'_3 + z'_4); \\ C_y &= 2(c_1 b_1^2 + c_2 b_2^2); \quad A_y = c_1 b_1(z'_1 + z'_2) + c_2 b_2(z'_3 + z'_4); \\ C_{zy} &= 2(c_1 b_1 - c_2 b_2). \end{aligned}$$

коэффициенты  $C_x, C_y, C_{zy}$ , входящие в выражение для  $\Pi_2^a$  можно рассматривать как обобщенные показатели жесткости агрегата.

В соотношениях (11) величины  $z'_1$  и  $z'_2$  характеризуют профиль поверхности поля под задними колесами, а  $z'_3$  и  $z'_4$  – под передними колесами агрегата (отсчет по оси  $z$  неизменного направления). Расчетной характеристикой профиля поверхности поля в продольном движении агрегата будут значения  $z'_3$  и  $z'_4$ , характеризующие профиль поверхности под задней и передней осями агрегата (рис. 1), причем

$$z'_3 = 1/2 (z'_1 + z'_2); \quad z'_4 = 1/2 (z'_3 + z'_4) \quad (12)$$

Что касается постоянных величин  $Z_m^0$  и  $M_y^0$ , то они представляют собой равнодействующую ( $Z_m^0$ ) вертикальных статических реакций почвы на колеса агрегата и моменты ее относительно осей  $y$  и  $x$ :

$$Z_m^0 = \sum_1^4 c_k d_k;$$

$$M_y^0 = c_1 b_1 (d_1 + d_2) + c_2 b_2 (d_3 + d_4) \quad (13)$$

Функцию сопротивления  $\Phi$  для навесных

агрегатов достаточно ограничить силами сопротивления, пропорциональными первой степени скорости (силы вязкого трения).

В частности, для колесного агрегата функцию сопротивления можно записать в следующем виде:

$$\Phi_m = \frac{1}{2} \sum d_k (\Delta \dot{z}_k)^2 \quad (14)$$

$$\Delta \dot{z}_k$$

где  $\Delta \dot{z}_k$  – скорость деформации  $k$ -й опоры, м/с;

$d_k$  – коэффициент сопротивления.

Так как  $\Delta \dot{z}_k = \dot{z}_k - \dot{z}'_k$

$$\begin{aligned} \text{то } \Phi_m &= \frac{1}{2} \sum_1^4 d_k (\dot{z}_k - \dot{z}'_k)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_1^4 d_k d_k \dot{z}_k^2 - \frac{1}{2} \sum_1^4 d_k \dot{z}_k \dot{z}'_k + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_1^4 d_k (\dot{z}'_k)^2 \end{aligned} \quad (15)$$

Дифференцируя (9), получим  $\dot{z}_k = \dot{z}_m - x_k \dot{y}$  (16)

После аналогии с расчетом потенциальной энергии, выражение (15) для функции  $\Phi$  приводится после соответствующих преобразований к следующему

$$\begin{aligned} \Pi_2^a &= \frac{1}{2} D_x \dot{z}_m^2 + \frac{1}{2} D_y \dot{y}^2 + D_{zy} \dot{z}_m \dot{y} - \\ &- B_x \dot{z}_m - B_y \dot{y} + \frac{1}{2} \sum_1^4 d_k (\dot{z}'_k)^2 \end{aligned} \quad (17)$$

$$D_x = 2(d_1 + d_2); \quad B_x = d_1(z'_1 + z'_2) + d_2(z'_3 + z'_4);$$

$$D_y = 2(d_1 b_1^2 + d_2 b_2^2); \quad D_{zy} = d_1 b_1(z'_1 + z'_2) + d_2 b_2(z'_3 + z'_4); \quad (18)$$

$$D_{yy} = 2(d_1 b_1 - d_2 b_2).$$

причем  $d_1$  и  $d_2$  – коэффициенты сопротивления для задних и передних колес агрегата.

Что касается обобщенных сил  $Q_q$ , то их вычисление производится известным методом, по отдельным вариациям обобщенных координат системы. Из совокупности виртуальных перемещений выделяется только то перемещение, в котором варьируется рассматриваемая обобщенная координата, а все остальные сохраняют прежние значения. Тогда элементарная работа ( $\delta W$ ) всех приложенных сил и моментов при вариации координаты  $q_k$  ( $\delta W$ )<sub>k</sub> =  $Q_k (\delta q_k)$  (19)

Ниже приводятся уравнения продольного движения, полученные для некоторых навесных

агрегатов.

**Уравнения движения навесного агрегата.** В продольном движении навесной агрегат можно рассматривать как систему с тремя степенями свободы. Обобщенными координатами агрегата в этом движении будут линейные вертикальные  $u$  ремещения  $z_m$  и продольно-углу  $\psi$  колебания агрегата, а также угол поворота  $\gamma$  нижних тяг навески вокруг поперечной оси, проходящей через центры присоединительных шарниров  $D$  (рис. 1).

Для составления уравнений продольного движения агрегата целесообразно рассматривать расчетную схему с приведенной к оси подвеса  $M$  массой навесной машины  $m_n$ .

Приведенную к оси подвеса массу  $m_{np}$  плуга можно определить из равенства кинетических энергий масс  $m_{np}u_m^2 = m_n u_c^2$

$$m_{np} = \frac{u_c^2}{u_m^2} m_n \quad (20)$$

откуда

$u_c$  и  $u_m$

Здесь  $u_c$  и  $u_m$  – скорости соответственно центра масс навесной машины и точки приведения  $M$  на оси подвеса, м/с. Так как значение  $m_{np}$  зависит от положений механизма навески, будем в дальнейшем считать  $m_{np} \approx const$ , понимая под этим некоторое среднее ее значение в пределах заданного рабочего хода нижних тяг навески. Если воспользоваться методикой составления уравнения (2) для каждой из обобщенных координат  $z_m, \psi$  и  $\gamma$ , то получим следующую систему уравнений описывающих продольное движение

$$\begin{cases} M_a \ddot{z}_m + D_z \dot{z}_m + C_z (z_m - a_k) + m_{np} b_D \ddot{\gamma} + \\ + D_{zy} \dot{\gamma} + C_{zy} \gamma + m_{np} r_x \dot{\gamma} = \\ - P_z + A_z + Z_m^0 - G_m + B_z; \\ J_h^{np} \ddot{\gamma} + D_\gamma \dot{\gamma} + C_\gamma \gamma + m_{np} b_D \ddot{z}_m + D_{zy} \dot{z}_m + \\ + C_{zy} (z_m - a_k) + m_{np} b_D r_x \dot{\gamma} = \\ - P_x b_D + P_x a_D + M_y - (M_x) \gamma + A_y + M_y^0 + B_y \\ m_{np} r_x (r_x \dot{\gamma} + b_D \ddot{\gamma} + \ddot{z}_m) = P_x r_x + M_y \end{cases}$$

где  $M = M_n + m_{np}$  – масса агрегата, кг ( $G_m$  – вес агрегата);  $J_h^{np} = J_h + m_{np} (a_D^2 + b_D^2)$  – приведенный момент инерции, кг·м<sup>2</sup> агрегата относительно поперечной оси, проходящей через центр масс  $O_m$  агрегата;

$r_x$  – проекция звена  $DM$  механизма навески на ось  $x$  неизменного направления, м (рис. 1);

$P_x$  и  $P_z$  – проекции главного вектора  $P$  внешних сил, действующих на навесную машину, Н;

$M_y$  – проекция главного момента внешних сил,

действующих на навесную машину, Н·м;

$(M_x)_y$  – момент внешних сил, действующих на агрегат относительно оси  $y$  неизменного направления, Н·м.

Рассмотрим вначале систему уравнений (21), описывающих продольное движение навесного пахотного агрегата. Прежде всего отметим, что используемые в теории агрегата зависимости для изучения плавности его хода являются также частными выражениями уравнений (21). Обычно при изучении плавности хода колесного агрегата при езде по неровной поверхности рассматривают его как одномассовую динамическую систему и учитывают только упругие свойства пневматических шин и подвесок, причем воздействием рабочей машины пренебрегают. Не учитывают иногда и демпфирующие свойства упругих сил, т. е. силы сопротивления, пропорциональные первой степени скорости деформации.

Если принять указанные упрощения, то уравнения

$$\begin{cases} M_a \ddot{z}_m + C_z z_m + C_{zy} \gamma = f_1(z') \\ J_h \ddot{\gamma} + C_\gamma \gamma + C_{zy} z_m = f_2(z') \\ m_{np} r_x (r_x \dot{\gamma} + b_D \ddot{\gamma} + \ddot{z}_m) = P_x r_x + M_y \end{cases} \quad (22)$$

где функции  $f_1(z') = A_z + C_z a_k$   
 $f_2(z') = A_y + C_{zy} a_k$

характеризуют неровности поверхности поля. При  $f_1(z') = 0$  и  $f_2(z') = 0$  уравнения (22) описывают свободные колебания агрегата в продольно-вертикальной плоскости.

Если в уравнения (22) подставить значения  $C_z, C_\gamma$  и  $C_{zy}$  из соотношений (11), то получим общеизвестные выражения для свободных колебаний

$$\begin{cases} M_a \ddot{z}_m + (c'_z + c'_n) z_m + (c'_z b_1 - c'_n b_2) \gamma = 0 \\ M_m \Gamma^2 \ddot{\gamma} + (c'_z b_1^2 + c'_n b_2^2) \gamma + (c'_z b_1 - c'_n b_2) z_m = 0 \\ m_{np} r_x (r_x \dot{\gamma} + b_D \ddot{\gamma} + \ddot{z}_m) = P_x r_x + M_y \end{cases} \quad (23)$$

$$\Gamma = \frac{J_h}{m_{np} r_x^2}; \quad c'_z = 2c_z; \quad c'_n = 2c_n.$$

В ряде случаев и, в частности, при анализе продольно-угловых колебаний  $\psi$  навесного плуга можно упростить систему (23) полагая, что  $c_i \rightarrow \infty$ , т.е. агрегат является абсолютно жестким телом. Такое ограничение может быть оправдано тем, что для установившегося движения агрегата существенными воздействиями являются изменения профиля поля и сопротивление почвы,

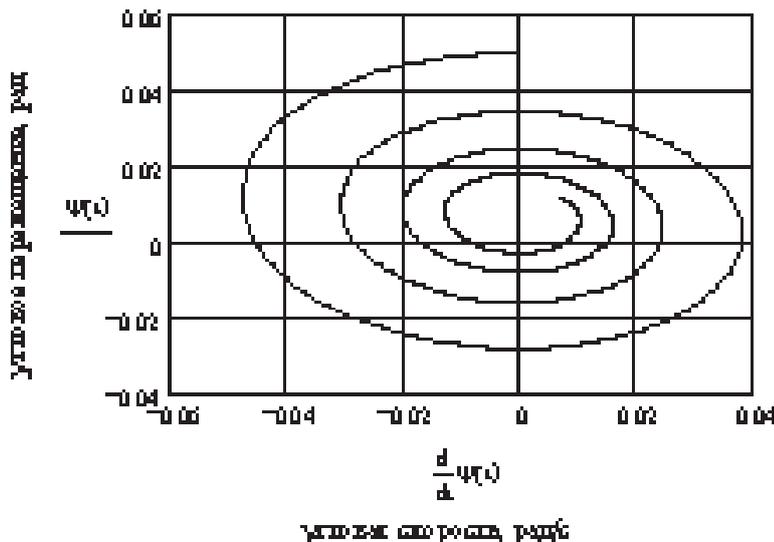


Рис. 2. Фазовая траектория при колебательном движении агрегата

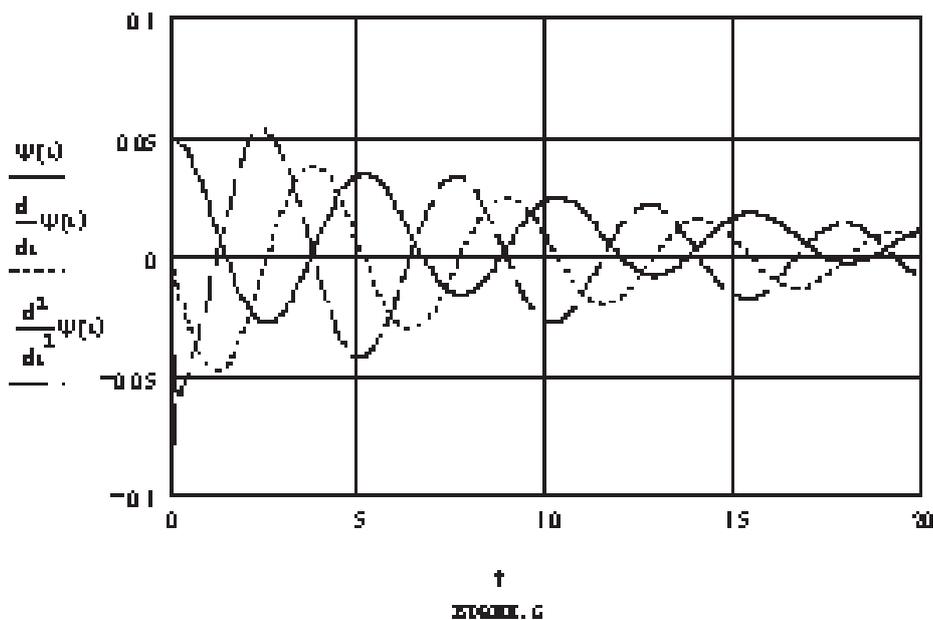


Рис. 3. Зависимость углового перемещения, скорости и ускорения от времени

определяющее вынужденные колебания агрегата. Собственные же колебания агрегата, обусловленные жесткостью пневматики (или подвесок), с течением времени после приложения возмущения затухают.

$$\begin{cases} 2z_m + (b_1 - b_2)y = z'_s + z'_n & \text{вно-} \\ (b_1^2 + b_2^2)y + (b_1 - b_2)z_m = b_1 z'_s - b_2 z'_n & \text{дому} \\ D_1(p)y_n = k_y D_2(p)y + k_z D_3(p)z_m + f(t) \end{cases} \quad (24)$$

где  $D_1(p), D_2(p), D_3(p)$  – дифференциальные полиномы второго порядка;

$k_y$  и  $k_z$  – масштабные коэффициенты ( $k_z$  имеет размерность  $m^{-1}$ );

$z_3$  и  $z_n$  – изменения профиля поверхности поля под передней и задней осями агрегата с базой отсчета, смещенной по оси  $z$  вниз на величину  $a_k$  (расстояния точек контакта колес с опорной поверхностью от плоскости  $xy$ ).  $y$

Первые два выражения системы (24) выражают зависимость переменных  $z_m$  и  $y$  от изменения профиля поверхности поля, если  $z_3$  и  $z_n$  рассма-

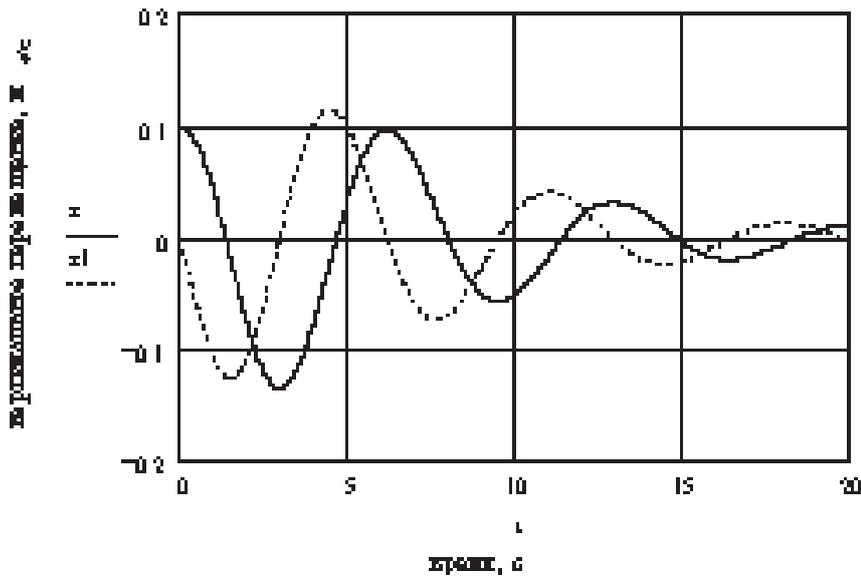


Рис. 4. Зависимость вертикального перемещения  $z$  и скорости  $\dot{z}$  от времени

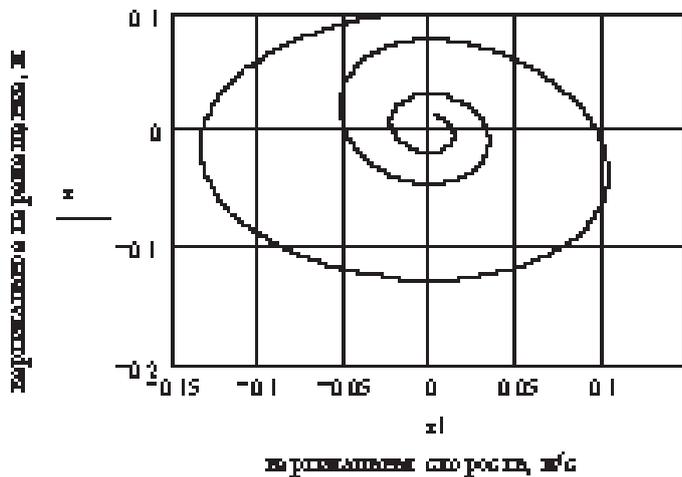


Рис. 5. Фазовая траектория вертикального перемещения при колебательном движении агрегата

тривать как координаты точек поверхности поля в системе отсчета  $xuz$ .

Решение полученных уравнений с помощью общеизвестных методов проводилось численное решение с помощью ЭВМ. Подставив полученные функции от времени в первое и во второе уравнение можно найти требуемые для расчета и проектирования выражения, определяющие перемещение и скорость агрегата в зависимости от конструктивных параметров. На рисунках 2 и 3 приведены результаты расчетов угловых перемещений, скоростей и ускорений в зависимости от времени для агрегата с навесным орудием и с характеристиками:

- $c_1 = 2,94 \cdot 10^3$  Н/м – жесткость передних колес;
- $c_2 = 1,96 \cdot 10^3$  Н/м – жесткость задних колес;
- $c = 1,5$  м – радиус инерции агрегата;

- $m = 5700$  кг – масса агрегата;
- $b_1 = 1,2$  м – расстояние от центра тяжести до оси передних колес;
- $b_2 = 2,8$  м – расстояние от центра тяжести до оси задних колес;
- $k_1 = 0,1$   $c_1$  – коэффициент демпфирования передних колес;
- $k_2 = 0,1$   $c_2$  – коэффициент демпфирования задних колес;

Начальные условия:  $Y(0) = 0,05$  рад;  $Y'(0) = 0$ .

На рисунках 4 и 5 приведены результаты расчетов вертикальных перемещений и скоростей в зависимости от времени в случае вертикальных колебаний системы вдоль оси  $z$  для агрегата с навесным орудием и с теми же характеристиками и начальными условиями: