

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АСПЕКТ ВРАЩЕНИЯ ЖИДКОСТИ В НАКЛОННОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СОСУДЕ

Ю.М. Исаев, доктор технических наук, профессор,  
Н.М. Семашкин, кандидат технических наук, доцент,  
В.А. Злобин, кандидат технических наук,  
ФГБОУ ВПО «Ульяновская ГСХА им. П.А. Столыпина»  
тел.: 8 (84231) 55-95-49, e-mail: emotion.snm@mail.ru

**Ключевые слова:** вращающаяся жидкость, угловая скорость, поверхность вращения.

Рассмотрено вращение жидкости в цилиндрическом сосуде с образованием поверхности вращения. Приведены выражения для построения графика движения частиц жидкости в трехмерном пространстве.

Рассмотрим открытый цилиндрический сосуд с жидкостью и сообщим ему вращение с постоянной

угловой скоростью  $\omega$  вокруг его оси под углом  $\alpha$  к

горизонту, сначала рассмотрим при  $\alpha = 0$ . Жидкость постепенно приобретет ту же угловую скорость, что и сосуд, а свободная поверхность ее видоизменится в центральной части уровень жидкости понизится, у стенок – повысится, и вся свободная поверхность жидкости станет некоторой поверхностью вращения.

На жидкость в этом случае будут действовать две массовые силы – сила тяжести и центробежная сила, которые, будучи отнесенными к единице мас-

сы, соответственно равны  $g$  и  $\omega^2 r$ .

Равнодействующая массовая сила  $j$  увеличивается с увеличением радиуса за счет второй составляющей, а угол наклона ее к горизонту уменьшается. Эта сила нормальна к свободной поверхности жидкости, поэтому наклон этой поверхности с увеличением радиуса возрастает. Найдем уравнение кривой в системе ко-

ординат  $Z$  и  $r$  с началом в центре дна сосуда. Учитывая,

что сила  $j$  является нормалью к кривой, находим:

$$\operatorname{tg} \beta = dz / dr = \omega^2 r / g,$$

откуда

$$dz = \omega^2 r dr / g,$$

или после интегрирования

$$z = \omega^2 r^2 / (2g) + C.$$

В точке пересечения кривой с осью вращения

$r = 0, z = h = C$ , поэтому окончательно будем иметь

$$z = h + \omega^2 r^2 / (2g) + C, \quad (1)$$

т. е. кривая является параболой, и свободная поверхность жидкости параболоидом. Такую же форму имеют и другие поверхности уровня.

Пользуясь уравнением (1), можно определить положение свободной поверхности в сосуде, например максимальную высоту  $H$  подъема жидкости и высоту  $h$  расположения вершины параболоида при данной угловой скорости  $\omega$ . Для этого необходимо использовать еще уравнение объемов: объем неподвижной жидкости равен её объему во время вращения.

Для определения закона изменения давления во вращающейся жидкости в функции радиуса и высоты выделим вертикальный цилиндрический объем жидкости с основанием в виде элементарной горизонтальной площадки  $dS$  (точка  $M$ ) на произвольном радиусе  $r$  высоте  $z$  запишем условие его равновесия в вертикальном направлении. С учетом уравнения (1) после сокращений получим

$$p = p_0 + (h - z) \rho g + \rho \omega^2 r^2 / 2.$$

Это значит, что давление возрастает пропорционально радиусу и уменьшается пропорционально высоте  $Z$ .

В случае вращения цилиндра с жидкостью с

угловой скоростью  $\omega$  вокруг его оси под углом  $\alpha$  к горизонту уравнение свободной поверхности в системе координат  $Oxyz$  можно вывести путем интегрирования дифференциального уравнения равновесия жидкости

$$Xdx + Ydy + Zdz - dp / \rho = 0. \quad (2)$$

Поместив начало координат в центре сосуда и

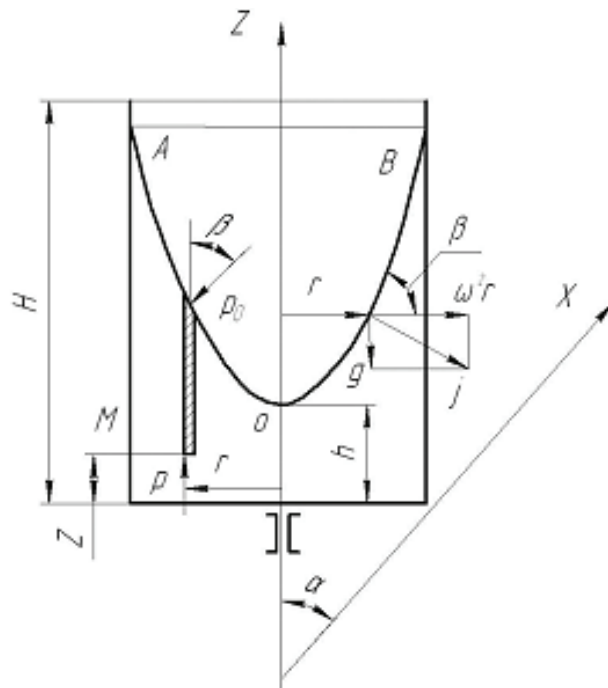


Рисунок 1 – Поверхность жидкости при вращении открытого сосуда вокруг оси

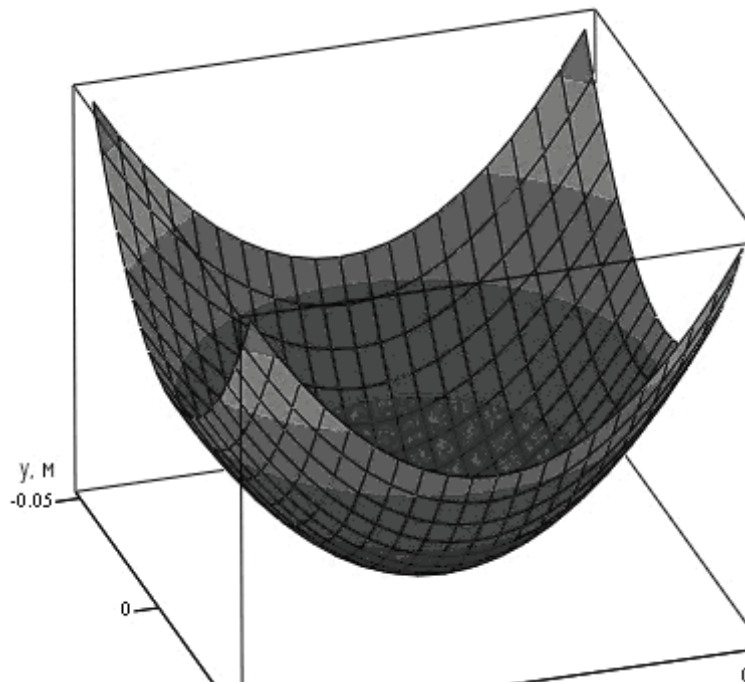


Рисунок 2 – Координатные значения частицы жидкости при её вращении в цилиндрическом сосуде

направив ось  $OZ$  вдоль оси цилиндра,  $Ox$  в сторону наклона перпендикулярно оси цилиндра получим, а ось  $Oy$ , образующую правую тройку получим

$$X = \omega^2 r \cos(r, x) + g \cos \alpha = \omega^2 x + g \cos \alpha,$$

$$Y = \omega^2 r \cos(r, y) = \omega^2 y; \quad Z = -g \sin \alpha.$$

Подставляя эти величины в уравнение (2), находим

$$dp = \rho \left( (\omega^2 x + g \cos \alpha) dx + \omega^2 y dy - g \sin \alpha dz \right).$$

После интегрирования получим

$$p = \rho \left( (\omega^2 x^2 / 2 + gx \cos \alpha) + \omega^2 y^2 / 2 - gz \sin \alpha \right) + C.$$

При  $X = Y = 0$  и  $Z = h$ ,  $p = p_0$  следовательно

$$Z = p_0 + h\rho g \sin \alpha$$

В результате окончательно получим

$$p = p_0 + \rho g(h - z) \sin \alpha + \rho \omega^2 (x^2 + y^2) / 2 + \rho g x \cos \alpha$$

Уравнение свободной поверхности жидкости можно найти, если положить,  $p = p_0$ . После сокращений и преобразований получим

$$z = \omega^2 (x^2 + y^2) / 2g \sin \alpha + x \operatorname{ctg} \alpha + h. \quad (3)$$

Что совпадает с ранее полученными формулами. Для вертикального вращения, при  $\alpha = \pi / 2$ ,

поучаем уравнение свободной поверхности (1), а при

$\alpha = 0$ , получаем уравнение поверхности вращения жидкости в горизонтальной трубе.

Используя упрощено уравнение (3) было получено трехмерное изображение движения частиц жидкости при её вращение в цилиндрическом сосуде с параметрами: угловая скорость  $\omega = 300 \text{ мин}^{-1}$ ; угол наклона  $\alpha = 25^\circ$ .

График на рисунке 2 был получит в программе Mathcad, где  $x$   $y$   $z$  – координатные значения частицы жидкости при постоянной угловой скорости вращения жидкости. Из графика видно, что частицы жидкости равномерно распространяются по всем координатным осям в равных координатах.

### **Библиографический список:**

1. Исаев, Ю.М. Оптимальные условия вертикального перемещения частицы / Исаев Ю.М., Семашкин Н.М., Евстигнеева О.Г., Кошкина А.О. // Международный журнал экспериментального образования. – 2013. – № 3. С. 76...77.
2. Исаев, Ю.М. Вращение сосуда с жидкостью под углом наклона / Исаев Ю.М., Семашкин Н.М., Гришин О.П., Гришина Е.В. // Современные наукоемкие технологии. – 2012. – № 7. С. 26.
3. Исаев, Ю.М., Влияние заборной части на транспортировку жидкостей из емкостей/Исаев Ю.М., Губейдуллин Х.Х., Гришин О.П., Аксенова Н.Н.// Современные проблемы науки и образования. 2006. № 6. С. 82-84.

## **THE ORETICAL ASPECT OF ROTATION OF LIQUID IN THE INCLINED CYLINDRICAL VESSEL**

**Isaev Yu.M., Semashkin N. M., Zlobin V.A.**

**Keywords:** *the rotating liquid, angular speed, a rotation surface.*

*Rotation of liquid in a cylindrical vessel about formation of a surface of rotation is considered. Expressions for creation of the schedule of particles of liquid are given in three-dimensional space.*